Universität Trier

Prof. Dr. J. Wengenroth
MSc T. Schlierkamp

Klausur **Einführung in die Mathematik**

Sommersemester 2016

27. Mai 2016

Persönliche Angaben

Name:

Matrikelnr.:

Unterschrift:

Bitte lesen Sie sich die folgenden Hinweise vor der Bearbeitung der Aufgaben sorgfältig durch:

- Bitte füllen Sie dieses Blatt aus und verwenden es als Deckblatt Ihrer Klausur.
- Versehen Sie jeden benutzten Bogen mit Namen oder Matrikelnummer.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Als Hilfsmittel zugelassen ist ein von Ihnen persönlich handschriftlich verfasster „Spickzettel" in Form eines beidseitig beschrieben DIN A4 Blatts
- Kreuzen Sie bitte in der folgenden Tabelle an, welche Aufgaben sie bearbeitet haben.

Aufgabe:	1	2	3	4	5	Σ
Bearbeitet:						-
Erreichte Punkte:						
Maximale Punkte:	20	16	16	9	8	69

Aufgabe 1 (5*4 Punkte)
Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n^n + cn}}{cn + c/(n+1)}$ mit $c > 0$, (b) $b_n = \log\left(\left|\dfrac{n}{n+4i}\right|^n\right)$,

(c) $c_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\exp\left(\dfrac{10^n}{n!}\right)\right)$,

(d) $d_1 = 1$ und $d_{n+1} = 1 + \dfrac{d_n}{3}$ (Tipp: Zeigen Sie zuerst $d_n \leq \frac{3}{2}$),

(e) $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2+k}$ (Tipp: $\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$)

Aufgabe 2 (4*4 Punkte)
Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:
(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} 2^n$, (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp(-nz^2)$ für $z \in \mathbb{C}$, (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\log(n)^p\, n^q}$ für $p, q > 0$,
(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ (Tipp: Benutzen Sie $\log(1+x) \geq x/2$ für $x \in [0,1]$).

Aufgabe 3 (4*4 Punkte)
Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Potenzreihen:
(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2}{3n+1} z^n$, (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^{3n}}{n!(n+1)!(n+2)!} z^n$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(1/n)^n z^n$,
(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (e^{1/n} - 1)^{n^2} z^n$ (Tipp: Benutzen Sie $e^x - 1 \leq xe^x$ für $x \geq 0$).

Aufgabe 4 (1+4+4 Punkte)
Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \log(1 + \exp(\cos(|z|))$ ist stetig.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x\cos(1/x) & , x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist stetig und surjektiv.

(c) Die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{\exp(z)}{1 + \mathrm{Re}(z)^2}$ ist surjektiv.

Aufgabe 5 (2*4 Punkte)

(a) Skizzieren Sie

$$M = \{re^{i\varphi} : r \in]1,2],\ \ \varphi \in [0,\pi[\}$$

und bestimmen Sie den Abschluss $\overline{M}$.
Ist M kompakt?

(b) Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und nicht leer. Zeigen Sie, dass es ein $z \in K$ gibt mit

$$|z| = \inf\{|w| : w \in K\}.$$

Ist solch ein z im Allgemeinen eindeutig?
Geben Sie ein nicht kompaktes K an, so dass es kein solches $z \in K$ gibt.

VIEL ERFOLG!